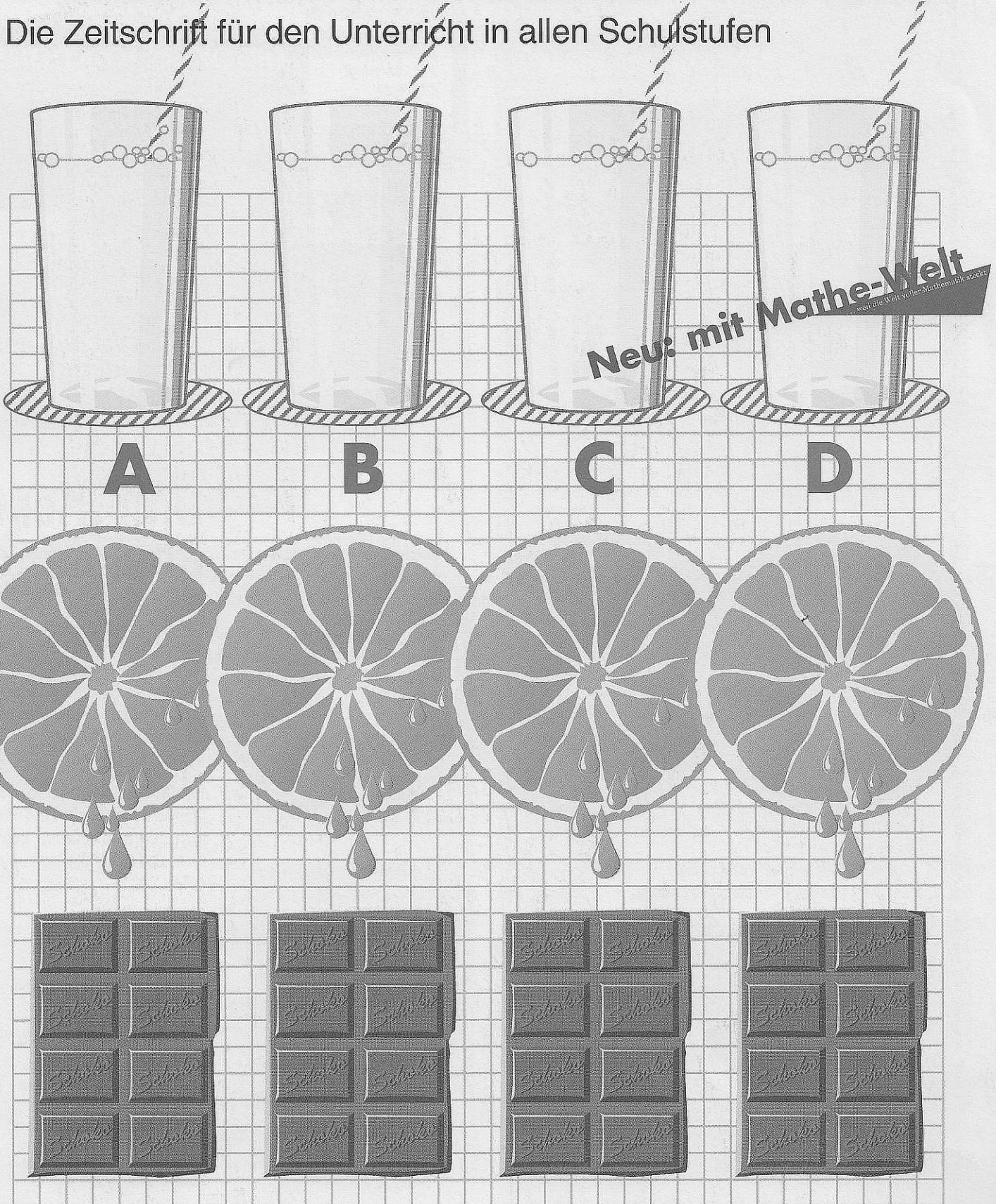


mathematiklehren

Die Zeitschrift für den Unterricht in allen Schulstufen



Freie Themen

*Man soll nie vergessen,
daß die Gesellschaft
lieber unterhalten
als unterrichtet sein will.*
Adolph Freiherr von Knigge

Spiele, Übungen und Denkaufgaben zur Förderung der Raum- vorstellung

von Thomas Müller

*Überlegungen, warum Spiele auch
in höheren Schulstufen in den
Unterricht integriert werden
sollen, stehen am Beginn dieses
Artikels. Die beschriebenen Spiele
„SOGO“ und „TIC-TAC-TOE“
im Raum gehören zu den
sogenannten Wettkampfspielen.
Eine Fortsetzung des Artikels mit
der Beschreibung anderer
Raumspiele ist geplant*

Thomas Müller, geb. 1956,
Studium der Fächer Mathematik und
Darstellende Geometrie in Wien von 1975
bis 1979, Lehrer am Gymnasium,
ab 1985 Vorlesungen an der Pädagogischen
Akademie in Krems.
Adresse: BG/BRG-Krems,
Piaristengasse 2, A-3500 Krems.

Warum im Unterricht spielen und Modelle bauen?

Die Möglichkeiten für Spiele mathematischer Natur sind unerschöpflich. In der Grundschule schon längst ein fester Bestandteil eines modernen kindgerechten Unterrichts, vermisst man diese Art von Lernen zumindest bei uns in Österreich in den Hauptschulen (HS) und allgemeinbildenden Schulen (AHS) noch weitgehend. Wohl fehlt es bis auf einzelne Ausnahmen an sofort einsetzbaren Spielen aus dem Handel, doch kommt das Selbstanfertigen sicherlich eher der Lehrplanforderung nach Kreativität, genauem Analysieren und Selbständigkeit entgegen. Vor allem das operative Tun ist wichtig zur Sicherung des erworbenen Wissens. Zu einem der Grundanliegen – der Ausbildung des räumlichen Vorstellungsvermögens – unserer Fächer Mathematik und Geometrisches Zeichnen bzw. Darstellende Geometrie wird durch sinnvolles Spielzeug schon vor dem Einsetzen dieser Fächer bei manchem Schüler der Grundstein gelegt.

Bemerkung für die Leser außerhalb Österreichs: Das Fach „Geometrisches Zeichnen“ (GZ) wird an den Hauptschulen und den Unterstufen der Realgymnasien zwei Jahre lang mit 1,5 bzw. 2 Wochenstunden unterrichtet. Dreizehn- und vierzehnjährige Buben und Mädchen besuchen dieses Fach. Durch den Einsatz von CAD-Programmen hat dieses Fach in den letzten Jahren einen deutlichen Imagewandel durchgemacht. Von einem Fach, das beinahe vor der Abschaffung bzw. Integration in den Mathematikunterricht stand, zu einem der zentralen Trägerfächer, in denen die Kinder hautnah Vorteile (und Nachteile) des Computereinsatzes kennenlernen. Der Inhalt von GZ stellt eine Erweiterung zu den Geometrieinhalten des Mathematikunterrichts und eine Vorstufe für das in vielen Berufsschulen verbreitete Fach „Technisches Zeichnen“ dar. Nach mehreren Lehrplanänderungen in den letzten Jahren soll dieses sogenannte „typenbildende Fach“ der Realgymnasien und Hauptschulen u. a. einen Beitrag zu folgenden fächerübergreifenden Zielen leisten:

- Ausbildung und Schulung der Raumvorstellung
 - Erziehung zu sauberem und genauem Arbeiten und präzisiertem sprachlichen Ausdruck
 - Weiterentwicklung der Konzentrationsfähigkeit und Ausdauer
 - Förderung der Kreativität
- Daneben ist eine ganze Reihe von

fachspezifischen Zielen zu erreichen, dazu gehören:

- Handhabung technischer Zeichengeräte (inklusive Einsatz des Computers);
- Lösen von Konstruktionsaufgaben;
- Darstellung räumlicher Objekte;
- Lesen technischer Zeichnungen und Pläne.

Wer mehr von den Inhalten wissen will, kann sich etwa das im Literaturverzeichnis angegebene preiswerte GZ-Buch [3] aus Wien bestellen!

Unter anderen scheinen mir die folgenden Gründe gewichtig genug, nicht nur in der Volksschule (Grundschule), sondern auch im Unterricht der Unterstufe der AHS und der Hauptschule „Spiele“ verstärkt zu forcieren:

1. Prinzip der Stabilisierung

Durch blockweisen Einschub bestimmter Modellbautechniken und Spiele kann das räumliche Vorstellungsvermögen auf andere Art und Weise gefördert und gefestigt werden als durch bloßes Zeichnen. Wittmann schreibt in [5]:

„Damit ein Schema gründlich einverleibt werden und sich zu einem stabilen Bestandteil der kognitiven Struktur des Lernenden entwickeln kann, muß es von Zeit zu Zeit in neuen anregenden Kontexten wieder geübt und angewendet werden... (Prinzip der Stabilisierung)“.

2. Operatives Prinzip

Durch den operativen Zugang und das Raumbegreifen soll vor allem jenen Kindern, die bisher keine Gelegenheit gehabt haben, ihre Raumvorstellungsfähigkeit zu entwickeln, ein Weg geboten werden, diese zu entwickeln und auszubauen – und die meisten Intelligenztests beinhalten auch raumvorstellungsbezogene Teile! Trotz der jahrelang geforderten und geförderten Gleichbehandlung von Mädchen und Buben liegt noch immer bei vielen Mädchen ein Defizit vor. Dies zeigte das im Jahre 1989 veröffentlichte Ergebnis [1] einer großangelegten Untersuchung des Bundesministeriums für Unterricht und Kunst in Österreich [BMUKS]. Ursachen dafür können die Auswahl von geschlechtstypischem Spielzeug (z. B. keine technischen Baukästen) und geringere einschlägige schulische Erfahrung (kein technisches Werken in der 1. und 2. Klasse) sein. Diese Untersuchung unter dem Titel „Geschlechtsunterschiede bei der Körper-/Raum-Wahrnehmungs- und Vorstellungsfähigkeit im Pflichtschulalter“ einer Arbeitsgruppe des

BMUKS aus dem Jahre 1985/86 be-
traf an die 3400 Schüler in ganz
Österreich. In der Zusammenfassung
[4] findet man einen Überblick über
die ausgeführten Tests und die wich-
tigsten Ergebnisse der Untersuchung
für Geometer. Das zentrale Zitat aus
dem Ergebnis der Untersuchung (Sei-
te 101): „Dies legt nahe, ... möglichst
viele Lerninhalte so aufzubereiten,
daß sie zum handelnden und (oder)
hantierendem Umgang auffordern ...“
stimmt genau mit der von vielen Di-
daktikern erhobenen Forderung nach
operativen (handelnden) Phasen im
Unterricht überein. Ein Zitat [5] soll
dieses Argument untermauern:

„... sind im Unterricht konkrete Mate-
rialien, ... einzusetzen, an denen die
Schüler real oder gedanklich operieren
und „forschen“ können. Die Medien
haben an sich nur eine untergeordnete
Bedeutung. Primär wichtig sind die an
ihnen ausgeführten Operationen. Me-
dien, die nicht „bearbeitet“, sondern
nur betrachtet werden können, haben
nur sehr beschränkten Wert!“

3. Querverbindungen und fächerübergreifender Unterricht

Bei den meisten Spielen und Spielfor-
men kann sinnvoll in Gruppen- oder
Partnerarbeit ein Wirtschaftsablauf
(Rollenspiel) simuliert werden: Zu-
erst stellt jeder Schüler ein Spiel oder
Modell selbst her, dann versucht man
die Herstellung zu optimieren, zu
„industrialisieren“: Von der Manu-
faktur bis zur „Fließbandarbeit“ kön-
nen die Arbeitsabläufe nachgestellt
werden. Manche Kollegen der Geo-
graphie und Wirtschaftskunde simu-
lieren in der 7. oder 8. Schulstufe Pro-
duktionsabläufe durch Herstellung
einfacher Arbeiten aus Papier (z. B.
Papierschiffe, Flieger, Schirmmüt-
zen). Warum soll man nicht gleich in
fächerübergreifender Weise brauch-
bare Modelle und Spiele für unseren
Unterricht herstellen lassen!? Selbst-
verständlich bietet sich bei jedem der
folgenden Spiele ein fächerübergrei-
fendes Vorgehen gemeinsam mit
dem Lehrer für (Technisches) Werken
an.

Auswahl der Spiele

Bei Wittmann wird die alte chinesi-
sche Weisheit zitiert:

„Ich höre und vergesse –
ich sehe und erinnere mich –
ich tue und verstehe.“

Das soll auch der Leitspruch für
die vorliegende Zusammenfassung
von einigen Raumspielen und Mo-
dellbautechniken sein.

Herauszufinden, welche Spiele den
Schülern Spaß machen, im Unter-
richt einsetzbar sind und zusätzlich
die Bildungsziele des Lehrplans un-
terstützen, ist Aufgabe dieser Serie.

Gerade die oben zitierten Lehr-
planzielvorgaben werden bei den
meisten der folgenden Spiele in wei-
tem Maße erfüllt, vom Denken im
Raum, der Analyse von Raumvor-
gängen, von der Ausdauer über die
Konzentrationsfähigkeit bis hin zur
Kreativität, wenn es um das Herstel-
len und Erfinden neuer (oder ähnli-
cher) Spiele geht.

Selbstverständlich soll der übliche
Stoffkanon durch Spiele nicht einge-
schränkt werden oder zu kurz kom-
men: Spielanregungen können den
schwierigen Einstieg in ein neues
Stoffkapitel (z. B. Raumkoordinaten-
system) erleichtern, in ein Beispiel
verpackt werden (z. B. Tetraederpuz-
zle), eine schöne GZ-oder Mathema-
tikstunde ergeben (am Schulbeginn,
vor Weihnachten u. ä.), Schüler, die
schon früher mit Zeichnungen in GZ
fertig sind, weiter sinnvoll beschäfti-
gen u. s. f.

Übersicht und Kurz- beschreibung der Spielideen:

Es geht bei den folgenden Beschrei-
bungen nicht um eine mathematische
Analyse der Spiele wie das Ent-
wickeln von Gewinnstrategien u. ä.,
sondern lediglich um eine Präsentati-
on, eine Zusammenfassung sicherlich
bekannter Spiele.

SOGO (Raumvariante des bekann- ten Spiels „Vier gewinnt“)

Das Spiel besteht aus einem (quadra-
tischen) Grundbrett, in welches 16 (4
mal 4) Stäbe eingebohrt werden.
Zwei Spieler stecken abwechselnd
schwarze bzw. weiße Kugeln auf die
Stäbe. Wem es zuerst gelingt, vier
Kugeln „gerade“ aufzufädeln, ist Sie-
ger. Dabei können die Kugeln senk-
recht übereinander, waagrecht, dia-
gonal angeordnet sein. Das Denken
in Raumgeraden ist hier sehr reizvoll
und lehrreich.

Variante: Hat der erste Spieler eine
„Kugelgerade“ geschafft, erhält er ei-
nen Punkt und es wird weiterge-
spielt. Wer am Schluß mehr Punkte
hat, ist Sieger.

Zum direkten Einsatz im Unter-
richt wurde das Arbeitsblatt „SOGO“
entwickelt (S. 11):

Lernziel: Orientierung im Raum,
Angabe von Raumpunkten durch
ebene Koordinaten (x/y) und die sich
bei diesem Spiel durch die Zahl der
bereits gesteckten Kugeln zwingend
ergebende Höhenangabe.

Unterrichtseinsatz: Das Spiel wird
an einem Modell vorgestellt oder in
fächerübergreifender Weise in Werk-
erziehung hergestellt. Das Arbeits-
blatt dient bei jüngeren Schülern zur
Kontrolle, ob der Transfer von der
Wirklichkeit im Raum in eine ebene
Darstellung vollzogen werden kann.
Bei älteren Schülern (ab 13 Jahren)
reicht zur Einführung der Text auf
dem Arbeitsblatt. Ein für Schüler und
Lehrer offenes SOGO-Turnier – wie
es von einem meiner Kollegen an sei-
ner Schule organisiert wurde – stei-
gert das Interesse an diesem Spiel si-
cherlich!

Literatur- und Bezugshinweise:

In [2] findet man im Band für die 3.
Klasse eine reizvolle Aufgabe, der
dieses Arbeitsblatt nachempfunden
wurde.

In [3] findet man mathematische
Überlegungen über die Anzahl der
„Mühlen“ und Strategien zum Spiel.

SOGO wurde von der Firma Ra-
vensburger vertrieben; gelegentlich
findet man Holzausführungen im
Spielwarenhandel oder bei Alterna-
tivversandhäusern

Ein von der Firma Haba hergestell-
tes Modell (9,6 x 9,6 x 6,5 cm³) kann
unter der Bestellnummer „YHA2458,
Kubikmühle/SOGO“ etwa bei der
Firma Wurm – Kindergarten- und
Schulversand
für Österreich: A-6341 Ebbs/Kuf-
stein, Oberndorf 18
für Deutschland: D-83088 Kiefersfel-
den, Gewerbepark 4
für rund 175 öS bzw. 25 DM bestellt
werden.

TIC-TAC-TOE im Raum

Verallgemeinerung des ebenen Wett-
spiels Tic-Tac-Toe, welches in vielen
Schulen (Pausen, Tafel) verbreitet ist.
Abwechselnd zeichnen die beiden
Spieler ihr Zeichen (Kreuze oder
Kreise) in die neun Spielfelder. Wer
zuerst drei in einer Reihe (waage-
recht, senkrecht, diagonal) geschafft
hat, ist Sieger (Abb. 1).

Die Verallgemeinerung in den
Raum kann etwa folgendermaßen
ausschauen:

Drei (durchsichtige) Plexiglasplat-
ten (Hier bietet sich wieder die Quer-
verbindung zum Werkunterricht an.)
werden durch Abstandhalter über-

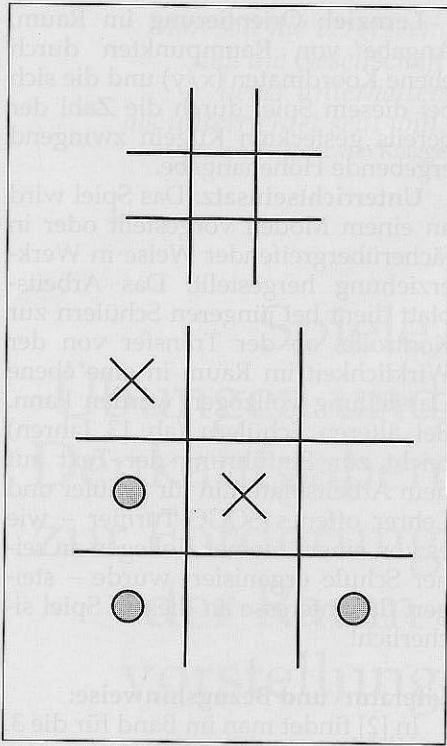


Abb. 1: Tic-Tac-Toe

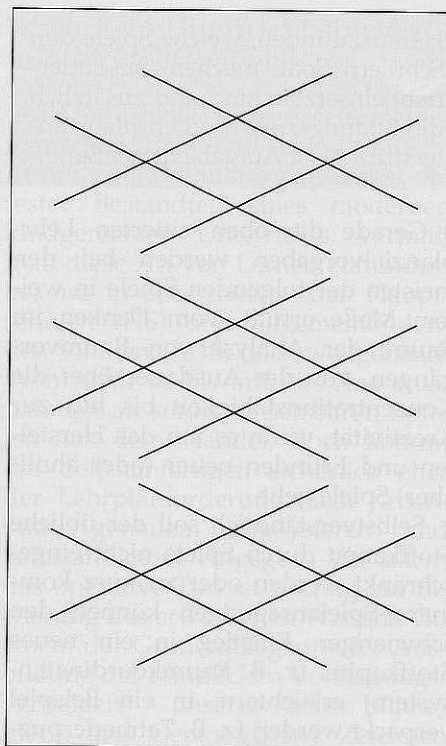


Abb. 3: Tic-Tac-Toe-3D („Zettelversion“)

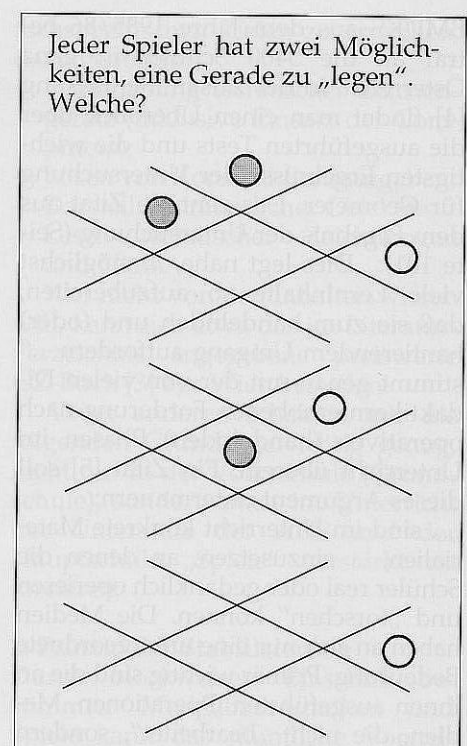


Abb. 4: Anforderung an das räumliche Vorstellungsvermögen

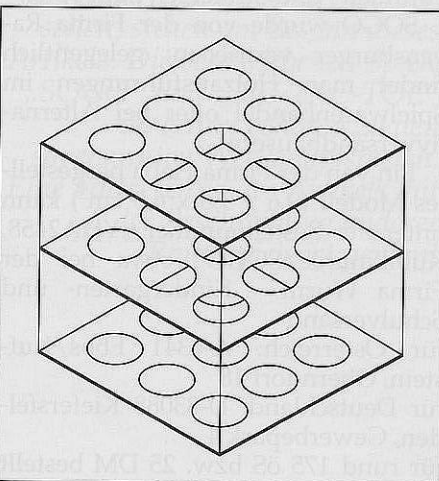


Abb. 2: Tic-Tac-Toe aus Plexiglas

einander gehalten, in jede Platte neun Löcher gebohrt. Als Spielsteine verwendet man Holzkugeln verschiedener Farbe, deren Durchmesser natürlich so gewählt werden muß, daß die Kugeln nicht durch die Löcher fallen (Abb. 2).

Werkanleitung:

Maße: Quadratseitenlänge 13 cm, Gesamthöhe des Werkstücks 13 cm, Bohrdurchmesser für Löcher 1,7 cm. Als Spielsteine können Holzkugeln mit einem Durchmesser von 2 cm verwendet werden, die man in zwei (oder drei) verschiedenen Farben beizen kann.

Die Plexiglasplatten werden durch Abstandhalter (z. B. Kunststoffröhrchen, übereingehalten. Die Verschraubung erfolgt durch 3mm-Gewindestangen, die durch die Röhrchen und durch Bohrlöcher in den drei Platten geführt werden.

Regelversionen:

Vers. 1: Der erste Spieler darf eine Kugel setzen, der zweite aber zwei, dann abwechselnd jeder eine. Sieger ist der, der zuerst drei Kugeln in einer Reihe hat.

Vers. 2: Jeder legt nur eine Kugel. Wenn ein Spieler den Mittelpunkt besetzt, dann darf der andere zum Ausgleich zwei Kugeln setzen.

Vers. 3: Ich habe mit Erfolg dieses Spiel für drei Spieler testen lassen (3 Farben!) Die Spieler legen abwechselnd je einen Stein ihrer Farbe. (Dabei muß aber „eisiges“ Schweigen herrschen!)

Vers. 4: Wie Vers. 1 bis 3, Sieger ist der, der mehr „gerade Dreierketten“ schafft.

Vers. 5: Spiel auf Zettel (Abb. 3). Schüler des Realgymnasiums sollten schon „der Ehre halber“ nur noch Version 5 (statt der ebenen) spielen. Man einigt sich vor Spielbeginn auf eine der Regeln aus Vers. 1 bis Vers. 4.

Diese Variante eignet sich recht gut für den praktischen Unterrichtseinsatz, weil das aufwendige Mitnehmen der Spiele entfällt. Es reichen

vielfältige Spielpläne (entweder leer oder mit vorgegebenen Aufgabenstellungen wie in Abb. 4).

Die **Arbeitsblätter 2 und 3 (S. 12 – 13)** können ebenfalls direkt im Unterricht verwendet werden:

Lernziel: Förderung der Orientierung im Raum, Vorübung zum Einsatz eines dreidimensionalen Koordinatensystems in spielerischer Form, Denken im Raum.

Unterrichtseinsatz: Die Schüler bearbeiten das Blatt 2 in der Schule (Geringer Zeitaufwand!), das Blatt 3 als Hausübung.

Literatur

[1] Berger, Pichler, Zankl, Hasenberger, Riedl, Stigler: Geschlechtsunterschiede bei der Körper-/Raum-Wahrnehmungs- und Vorstellungsfähigkeit im Pflichtschulalter, Ergebnisse eines Forschungsprojektes, Wien: BMUKS, 1989.
 [2] Felzmann, Blümel, Weidinger, Tittler: Geometrische Bilder [-Skizzieren - Konstruieren - Programmieren], Arbeitsbuch für die 3. Klasse; Arbeitsbuch für die 4. Klasse. Zweiteiliges Lehrbuch für das Fach Geometrisches Zeichnen in Österreich, Hölder-Picghler-Tempsky, Wien, 1990.
 [3] Gronau/Kerber „Raummühle“ in Alpha Nr. 2, 1986 (Seite 37).
 [4] Müller, Geschlechtsunterschiede bei der Körper-/Raumwahrnehmungs- und Vorstellungsfähigkeit unter der Lupe der Forscher Informationsblätter für Darstellende Geometrie 2/91 (erhältlich bei der Redaktion: IBDG, A-6020 Innsbruck, Technikerstraße 13) Serebriakoff V., Mensa-Rätsel für Hochbegabte, München: Hugendubel, 1985 2. Auflage.
 [5] Wittmann E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts, 6. Auflage, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden 1981.

SOGO

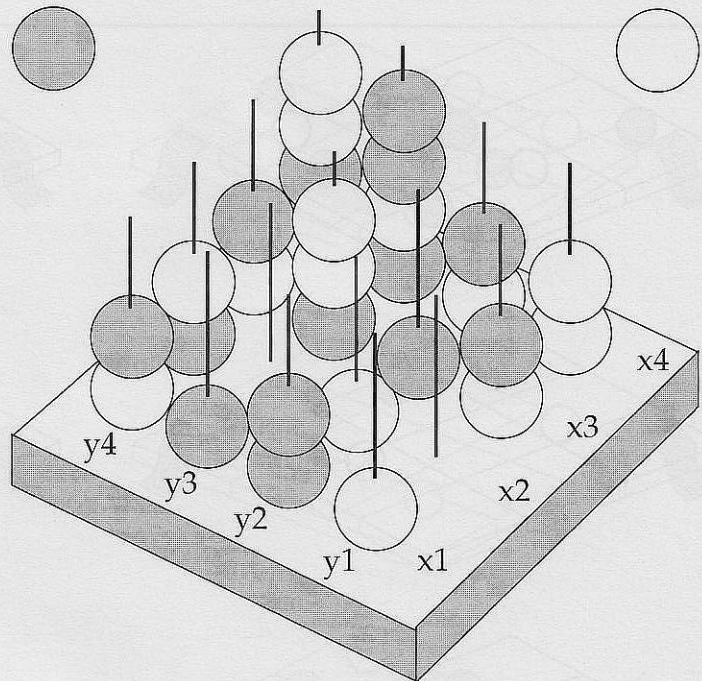
Zwei Spieler stecken abwechselnd je eine Kugel auf die Stäbe. Wer zuerst vier Kugeln seiner Farbe in eine Reihe (d. h. in eine Gerade, z. B. waagrecht, lotrecht oder diagonal) gebracht hat, ist Sieger. (Dieses Spiel kannst Du leicht nachbauen.)

Die folgenden Aufgaben wurden dem Beispiel Ü1 im Buch „Geometrische Bilder 3. Klasse“ von Felzmann, Weidinger, Blümel, Tittler (HPT-Verlag, Wien) nachempfunden.

Aufgabe 1:

Wenn der Spieler mit den hellen Kugeln an der Reihe ist, kann er seine Kugel auf den Stab $(x2/y2)$ geben, um zu gewinnen. Gibt es für ihn noch eine zweite Möglichkeit?

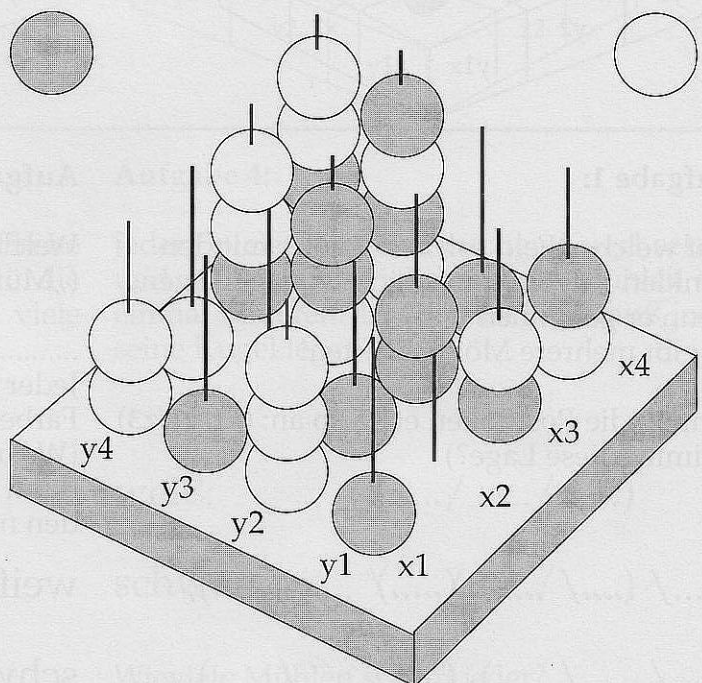
Kann der Spieler mit den dunklen Kugeln auch eine Viererreihe schaffen, wenn er der nächste ist?



Aufgabe 2:

Wenn der Spieler mit den weißen Kugeln an der Reihe ist, kann er seine Kugel auf den Stab $(x4/y2)$ geben, um zu gewinnen. Gibt es für ihn noch eine zweite Möglichkeit?

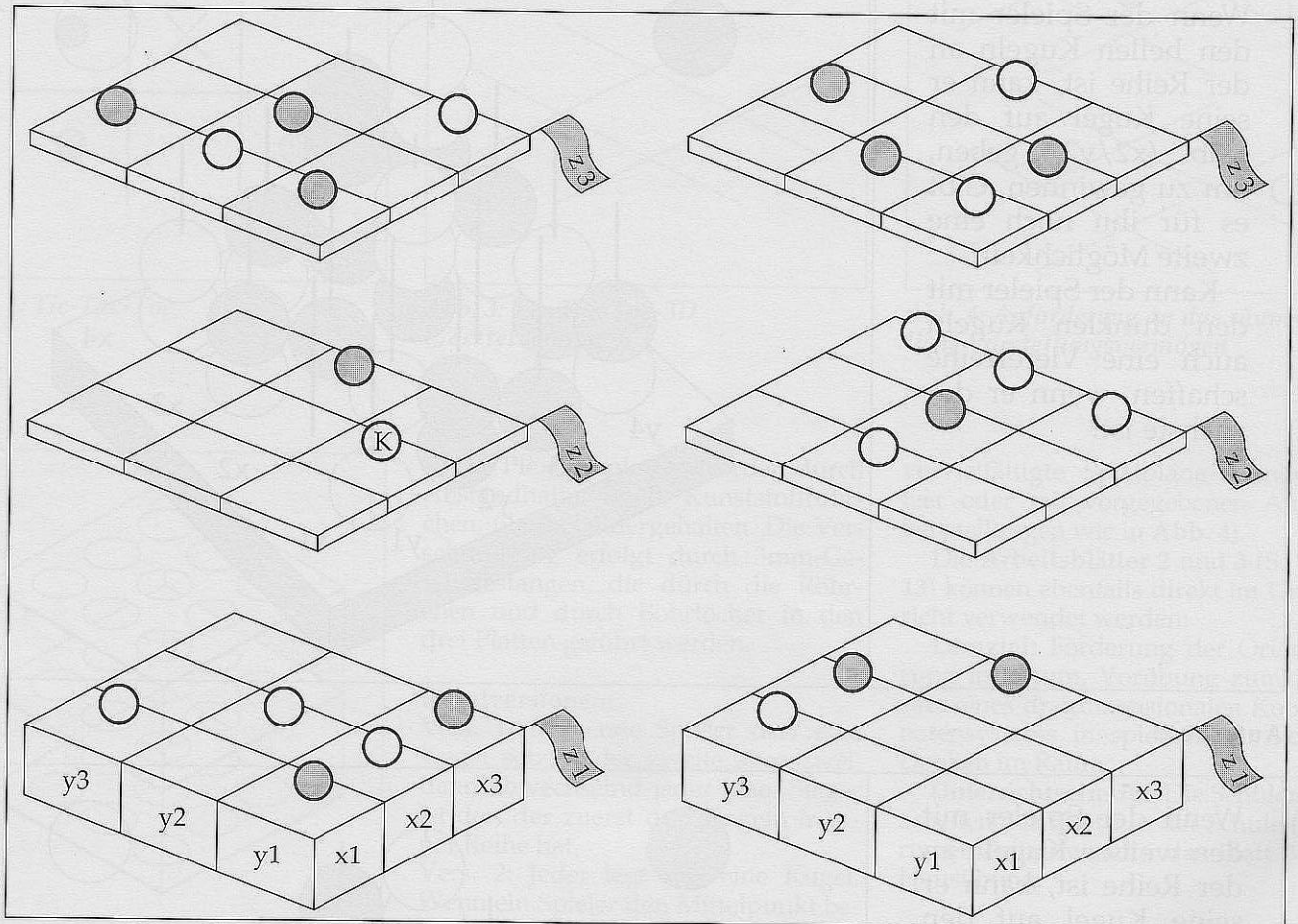
Kann der Spieler mit den dunklen Kugeln auch eine Viererreihe schaffen, wenn er der nächste ist?



TIC-TAC-TOE im Raum

Zwei Spieler legen abwechselnd je eine Kugel oder Scheibe auf die einzelnen Felder. Wer zuerst drei Kugeln seiner Farbe in eine Reihe (d. h. längs einer Geraden, z. B. waagrecht, lotrecht oder diagonal) gebracht hat, ist Sieger. (Dieses Spiel kannst Du aus Pappe, Holz oder Plexiglas nachbauen.)

Damit Du die Position jeder Kugel leicht angeben kannst, verwendest Du am besten immer die Buchstaben- und Zahlenkombinationen, zum Beispiel hat in Aufgabe 1 die Kugel K die Lage über dem Kästchen x2 und y1 in der Höhe z2, kurz (x2/y1/z2) oder (2/1/2) geschrieben.



Aufgabe 1:

Auf welches Feld soll der Spieler mit den dunklen Kugeln seine nächste Kugel legen, wenn er gewinnen will?

Es gibt mehrere Möglichkeiten!

Schreib die Positionen etwa so an: (x1/y1/z3)
(Stimmt diese Lage?)

(...../...../.....), (...../...../.....),

(...../...../.....), (...../...../.....).

Aufgabe 2:

Welcher Spieler hat mehr Dreierketten („Mühlen“)?

.....
Jeder Spieler darf eine einzige Kugel seiner Farbe setzen. Wo soll er sie hingeben?
(Wenn er schon keine Mühle erhalten kann, dann soll er sich eine gute Möglichkeit für den nächsten Zug schaffen!)

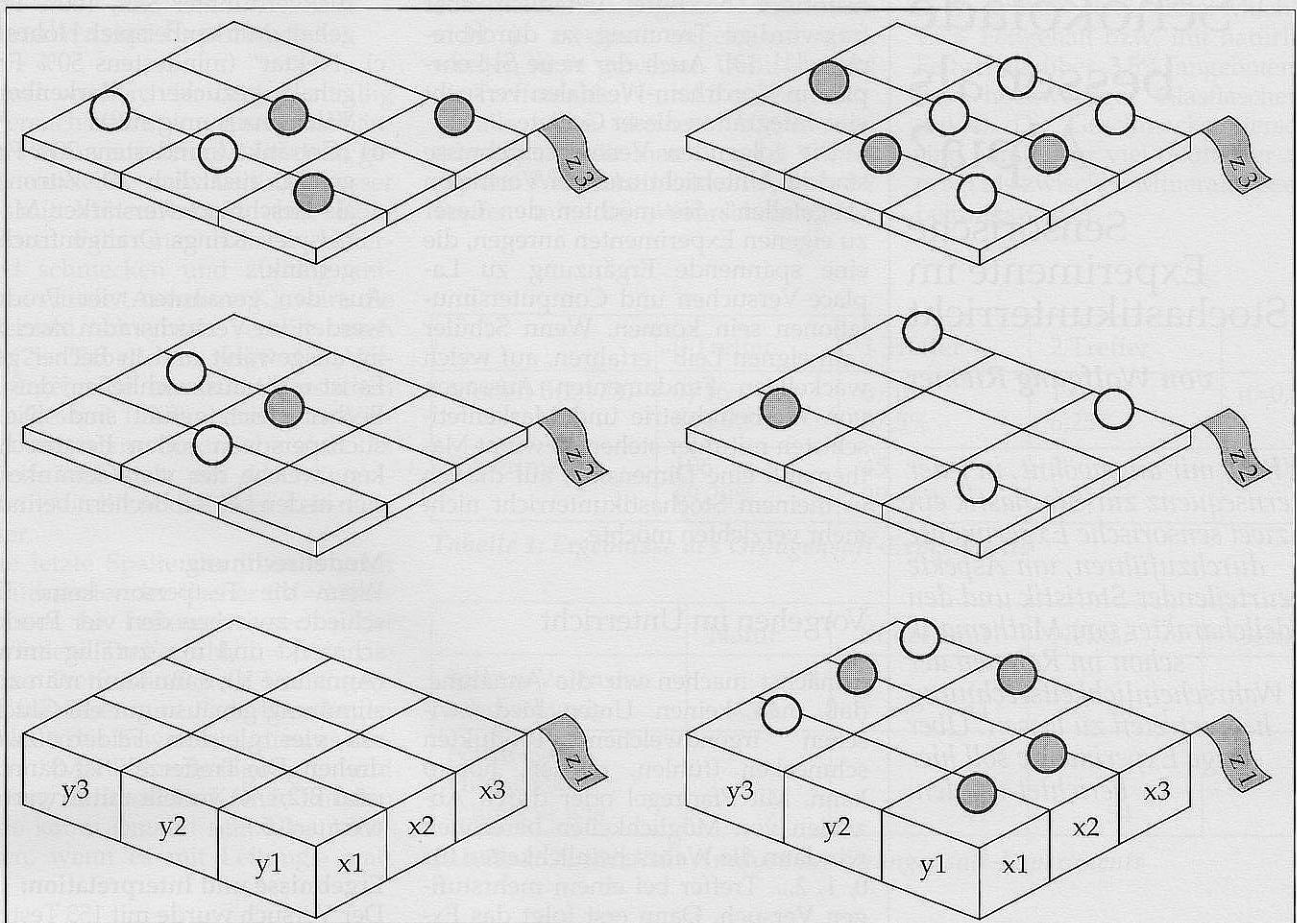
weiß: (...../...../.....)

schwarz: (...../...../.....)

TIC-TAC-TOE im Raum

Zwei Spieler legen abwechselnd je eine Kugel oder Scheibe auf die einzelnen Felder. Wer zuerst drei Kugeln seiner Farbe in eine Reihe (d. h. längs einer Geraden, z. B. waagrecht, lotrecht oder diagonal) gebracht hat, ist Sieger.

Gib die Position jeder Kugel wieder mit den Buchstaben- und Zahlenkombinationen wie beim ersten Arbeitsblatt an, zum Beispiel $(x2/y1/z2)$ oder $(2/1/2)$.



Aufgabe 3:

Jeder Spieler darf in der untersten Ebene zwei Kugeln plazieren! Wie müssen die Spieler setzen, damit jeder möglichst viele „Mühlen“ schafft!

weiß: $(\dots / \dots / \dots),$
 $(\dots / \dots / \dots)$

schwarz: $(\dots / \dots / \dots),$
 $(\dots / \dots / \dots)$

Aufgabe 4:

Jeder Spieler darf eine einzige Kugel setzen und soll damit möglichst viele Mühlen auf einmal schaffen! In welches Feld muß jeder seine Kugel legen?

weiß: $(\dots / \dots / \dots)$

schwarz: $(\dots / \dots / \dots)$

Wieviele Mühlen schafft jeder?